Een eenvoudig model voor de vrije val van een meteoriet

Casper ter Kuile *

ENGLISH SUMMARY

A simplified method is developed to derive the displacement of objects in the atmosphere due to windeffects during their free fall to the earth surface. The program was tested on observational data of the Glanerbrug meteorite fall.
The duration of fall from a height of 25 kilometers has been about 3 minutes. The computed velocity of the meteorite when it hit the house in Glanerbrug amounts between 200 and 300 kilometers/hour depending on the mass of the meteorite and on the friction coefficient in the atmosphere. These values are in good agreement with those, found from the mass distribution of the recovered particles. The drift of the meteorite caused by windeffects in the upper atmosphere during the time of fall through the atmosphere has been between 0.5 and 1 kilometers. As only visual data obtained by inexperienced observers were used, one should be fully aware of great uncertainties in the given results.

Inleiding

De Glanerbrug meteoriet heeft veel in beweging gebracht. Aangezien het programma Dark-Flight [1] van Dr. Z. Ceplecha van het Ondřejov observatorium in Tsjechoslowakije bij DMS te Leiden nog niet operationeel is deed zich de behoefte voelen aan een (vereenvoudigd) model om enig inzicht te verkrijgen in de gevolgen van luchtstromingen op grotere hoogten. Aan de hand van de resultaten kan in een later stadium eventueel besloten worden alsnog een tweede zoekaktie te organiseren naar meerdere brokstukken van de Glanerbrug meteoriet. Dit artikel poogt de werking van het model te verduidelijken en een orde van grootte aan te geven van de verplaatsing van de meteoriet als gevolg van de luchtstromingen op grotere hoogten in de atmosfeer.

Theorie

Om inzicht te krijgen in het model, is enige natuurkundige basiskennis wel vereist. Ook de basisprincipes van de numerieke wiskunde worden bekend verondersteld. Voor achtergrondinformatie verwijzen we naar [2] t/m [7]. In [3], [4] en [5] wordt de stroming om bollen beschreven. [6] gaat dieper in op temperatuureffecten die een rol spelen.
Laten we beginnen met te kijken welke krachten er op de meteoriet werken. Dit wordt in de literatuur ook wel het opstellen van de krachtenbalans genoemd. Voor de eenvoud stellen we de meteoriet als een bol voor.
Ten eerste de zwaartekracht:

$$F_1 = m \times g \quad \text{waarbij} \quad m = \rho_m \times \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 \qquad (1)$$

waarin :
g : de versnelling van de zwaartekracht.
ρ_m : de dichtheid van de meteoriet.
r : de straal van de meteoriet

Dan is er de wrijvingskracht met de omringende lucht. Hiervoor passen we de wet van Stokes toe:

$$F_2 = C_w \times \frac{\pi}{4} \times D^2 \times \frac{1}{2} \times \rho_l \times V_s^2 \qquad (2)$$

waarin :
C_w : de weerstands-coëfficiënt
D : de diameter van de bol
ρ_l : de dichtheid van de atmosfeer
V_s : de valsnelheid van de bol

De grootte van de weerstandscoëfficiënt C_w is afhankelijk van de snelheid waarmee de lucht om het voorwerp stroomt. Met behulp van het dimensieloze kengetal van Reynolds [3] is te bepalen met welk soort stroming we te maken hebben: laminair of turbulent. Dit kengetal van Reynolds luidt als volgt:

$$Re = \frac{\rho_1 \times V_m \times D_m}{Etal} \qquad (3)$$

waarin:
ρ_1 : de dichtheid van de atmosfeer
V_m : de snelheid van de meteoriet
D_m : de diameter van de meteoriet
$Etal$: de dynamische viscositeit van lucht

Indien de twee krachten F_1 en F_2 die op de bol werken even groot zijn dan zal de bol geen versnelling ondervinden. Is er echter een verschil dan zal de bol een versnelling of vertraging a ondervinden volgens:

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m} \qquad (4)$$

Met behulp van deze zojuist berekende versnelling (of vertraging!) kunnen we berekenen waar de bol zich na een bepaald tijdsinterval bevindt:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \qquad (5)$$

*Akker 145, 3732 XD De Bilt

Waarin:
s : positie van de bol na tijdsinterval t
v_0 : snelheid op tijdstip t = 0
t : tijdsinterval

Nu doet zich nog een ander probleem voor. Dat is de luchtdichtheid die met de hoogte afneemt. In de praktijk neemt de luchtdruk na ongeveer elke 6000 meter met een faktor twee af. Theoretisch wordt dit verband beschreven door een e–macht. In formulevorm:

$$\rho_l = \rho_0 \times e^{-(C \cdot h)} \quad (6)$$

Waarin:
ρ_l : luchtdichtheid op hoogte h
ρ_0 : luchtdichtheid aan het aardoppervlak
C : constante
h : hoogte boven het aardoppervlak

We hebben nu alle benodigde formules beschreven. Hoe zetten we dit geheel nu om in een werkend model? In principe hebben we hier te maken met een differentiaalvergelijking. Een differentiaalvergelijking kan vaak analytisch opgelost worden. Het voert op deze plaats te ver om daar tot op detail op in te gaan.
Maken we echter gebruik van een computer dan kunnen we onze toevlucht nemen tot de numerieke wiskunde. Deze laatste techniek komt erop neer dat we via een groot aantal kleine stapjes de beweging van de meteoriet in de aardse atmosfeer volgen. Op al die plaatsen worden de krachten berekend die op de meteoriet werkzaam zijn.
De berekeningen worden volgens het onderstaande schema uitgevoerd. In een 'loop' worden achtereenvolgens berekend:

1. Krachtenbalans op meteoriet: zwaartekracht (1) en wrijvingskracht (2).
2. Een verschil geeft aanleiding tot een versnelling (of vertraging) van de meteoriet (4).
3. Versnelling en tijdstap geven snelheid en positie (5).
4. Wrijvingskracht is afhankelijk van dichtheid van de atmosfeer op hoogte z (6).
5. Windrichting en –snelheid hebben invloed op beweging in het horizontale vlak.
6. Vervolgens weer terug naar stap 1.

Basisgegevens

In tabel 1 geven we een overzicht van alle gegevens die noodzakelijk zijn om het model te kunnen draaien.

Het atmosferisch windveld

Via het KNMI te De Bilt (Jacob Kuiper) heeft DMS de beschikking gekregen over een uitgebreide tabel met gegevens over windrichtingen en –snelheden op grotere hoogten in de atmosfeer. De gegevens in deze tabel zijn ingevoerd in het dark flight model. De gegevens in deze tabel zijn verkregen met professionele instrumenten en dus zeer nauwkeurig als we die vergelijken met andere parameters als massa en weerstandscoefficient. Tabel 2 geeft een (zeer) verkort overzicht van de gegevens.

Massa (kg)	1.000
Soortelijke massa (kg/m^3)	2500
Diameter (m)	0.091
Weerstandscoëfficiënt	0.43
Starthoogte (m)	25000
Snelheid (m/s)	0
Invalshoek (zenit=90) (°)	90
Azimuth (zuid=0) (°)	270
Tijdstap (sec)	0.100

Table 1: *Inputgegevens voor het vrije val model.*

Hoogte (m)	Luchtdruk (hPa)	Windrichting (grd)	Windsnelheid (m/s)
5	1015.7	30	7.2
1526	841.6	64	9.6
3194	678.9	2	6.0
3953	614.3	312	6.9
6125	455.9	271	14.2
10132	248.5	267	20.8
16059	98.4	267	25.8
22177	37.8	269	20.0

Table 2: *Deel van de windtabel van het KNMI.*

Tijdstap (sec)	0.010	0.100	1.000
Tijdsduur (sec)	181	181	182
Positie X (m)	+827	+828	+838
Positie Y (m)	-48	-48	-48
Snelheid Z (m/s)	+71.2	+71.5	+70.3

Table 3: *Stabiliteit van het model.*

In de weerkunde wordt de windrichting geteld vanaf noord (0°) over oost (90°). Een windrichting van 270° betekent dat de wind uit het westen waait. De snelheidsvektor is echter positief naar het oosten! Het windveld is globaal op te delen in 3 segmenten:

1. Vanaf het maaiveld tot ongeveer 3000 meter hoogte waait de wind uit het noord-oosten.
2. Vanaf 3000 tot ongeveer 5000 meter bevinden we ons in een overgangsgebied waarin de wind draait van het noord–oosten via het noorden naar het westen.
3. Vanaf 5000 meter tot het einde van de tabel op circa 22 kilometer hoogte waait de wind steeds vrijwel pal uit het westen.

Voor meer informatie over de weersomstandigheden tijdens de val van de Glanerbrug meteoriet verwijzen we naar een artikel van de hand van Jacob Kuiper. [8]

Resultaten

1. Algemeen.

Er zijn een drietal sets berekeningen uitgevoerd met, vanzelfsprekend, de gegevens van de Glanerbrug meteoriet als voorbeeld. Deze berekeningen hebben betrekking op:

- Stabiliteit van het model.
- Invloed van de massa.

M (kg)	0.100	0.250	0.500	1.000	2.500	5.000	10.000
D (m)	0.042	0.058	0.073	0.091	0.124	0.156	0.197
Tijd (sec)	258	224	201	181	159	144	131
X (m)	+1791	+1359	+1075	+828	+559	+401	+280
Y (m)	-151	-99	-70	-48	-28	-18	-12
V_z (m/s)	+49	+57	+64	+72	+84	+93	+106

Table 4: *Invloed van de massa.*

- Invloed van de weerstandscoëefficiënt C_w.

De dichtheid is nauwkeurig bepaald aan de hand van een brokstuk van de meteoriet.
Berekend worden:

- De totale tijd die de meteoriet erover doet om vanaf 25 kilometer hoogte het aardoppervlak te bereiken.
- De verplaatsing in X– en Y–richting.
- De snelheid waarmee de meteoriet het aardoppervlak treft.

Nog enige verduidelijkingen bij de tabel: X is positief in oostelijke en negatief in westelijke richting; Y is positief in noordelijke en negatief in zuidelijke richting. Z wordt gerekend vanaf het aardoppervlak. Hetzelfde geldt voor de snelheid.

2. Onderzoek naar de stabiliteit van het model.

Als eerste test is gerekend met een drietal verschillende tijdstappen. Dit om na te gaan of het model stabiel is en er geen accumulatie van afrondingsfouten optreedt. Tabel 3 toont overduidelijk aan dat het model voor de toegepaste tijdstappen stabiel is en er ook geen accumulatie van afrondingsfouten optreedt. Voor de parameters zijn de waarden in tabel 1 aangehouden.

3. Onderzoek naar de invloed van de massa.

De tweede set berekeningen heeft als parameter de massa. Dit is een gegeven waar een tamelijk grote onzekerheid inzit. Oorspronkelijk werd gedacht dat de totale massa ongeveer 670 gram bedroeg. De laatste gegevens wijzen erop dat de massa eerder rond de één kilogram moet hebben gelegen [1]. De massa bepaalt mede het aanstromingsoppervlak en daarmee de weerstandskracht als gevolg van de luchtwrijving. Het is met behulp van dit model niet vast te stellen hoe groot de massa van de meteoriet is geweest. We moeten wat dat betreft geheel vertrouwen op de nauwgezetheid waarmee de onderzoekers de brokstukken en stukjes bijeen hebben geraapt en gewogen.
Laten we deze tweede set berekeningen iets nauwgezetter bestuderen. We kijken nu vooral naar de invloed van de hoogtewinden op de verplaatsing van de meteoroïde in X–richting. We zien dan dat een kleine massa een relatief groot aanstromingsoppervlak heeft ten opzichte van de grotere massa's. De meteoroïde zal er dus langer over doen om het aardoppervlak te bereiken. Gevolg is dat de hoogtewinden langer de tijd hebben om het deeltje in horizontale richting te verplaatsen. Nemen we aan de massa van de oorspronkelijke meteoriet ongeveer 1000 gram is geweest [1] dan kunnen

C_w	0.20	0.43	0.62	1.20
Tijd (sec)	114	155	181	245
X (m)	153	514	828	1631
Y (m)	-5	-25	-48	-131
V_z (m/s)	+129	+86	+72	+51

Table 5: *Invloed van de weerstandcoëfficiënt C_w.*

de hoogtewinden de meteoriet over een afstand van een halve tot een hele kilometer verplaatst hebben.
Voor de waarden van de diverse parameters verwijzen we naar tabel 4.

4. Onderzoek naar de invloed van de weerstandscoëfficiënt C_w.

De derde set berekeningen is in feite de belangrijkste. Het blijkt dat de weerstandscoéfficiënt een relatief grote invloed heeft op het resultaat van de berekeningen.
We geven hier de weerstandscoëfficiënten voor onderstaande objecten in turbulente stroming volgens Smith en Stammers. [3] Voor turbulente stroming geldt dat het getal van Reynolds tussen 500 en 200000 ligt.

- Gladde bol : 0.43
- Cylinder met L=D : 0.62
- Cylinder met L=00 : 1.20
- Platte cylinder : 2.00

Hierin is L de lengte van de cylinder en D de diameter.

Er is nog een ander probleem waar we mee te maken krijgen bij zeer hoge stroomsnelheden zoals we die tegenkomen bij objecten die vrij in lucht vallen. Het blijkt dat de weerstandscoefficient bij Re > 200000 als gevolg van grenslaageffecten plotseling sterk afneemt tot een waarde van ongeveer 0.20 Het zal duidelijk zijn dat dit verschijnsel van grote invloed is op de uitkomsten van het model.
Uit het kengetal van Reynolds blijkt dat de stromingsweerstand om voorwerpen als bollen afhangt van de viscositeit van de omringende lucht. Aangezien de viscositeit van lucht ongeveer evenredig is met de wortel uit de temperatuur zal het punt waarbij de weerstandscoëfficiënt sterk afneemt door de temperatuur beïnvloed worden. Voor de grootte van de weerstandscoëfficiënt is het antwoord op een tweetal vragen van belang.
De eerste is door welke vorm de meteoriet het dichtst benaderd wordt. Dat een gladde bol een te optimistische voorstelling zal zijn lijkt aannemelijk. De gemiddelde meteoriet zal misschien op het eerste gezicht wel iets weg hebben

van een bol maar dan wel één met een ruw oppervlak en voorzien van meer of minder grote uitsteeksels die de wrijving zeker positief beïnvloeden. Aan de andere kant is een 'oneindig' lange cylinder al evenzeer niet aannemelijk. Bij dit object bestaat er geen stroming om het uiteinde van de cylinder hetgeen bij een meteoriet wel het geval is. De waarheid zal ergens in het midden liggen. Hoe groot de fout is die we maken indien we de waarde voor een cylinder met L=D (0.62) aanhouden zal wel nooit zijn vast te stellen.
De tweede vraag is welke waarde het kengetal van Reynolds aanneemt en of bij die waarde sprake is van een sterk verminderde weerstandscoëfficiënt. Reynolds is sterk afhankelijk van de snelheid en de massa (diameter) van de meteoriet en van de viscositeit van de omringende lucht. De snelheid is weer een functie van de weerstandscoëfficiënt waarmee de cirkel rond is. Voor een massa van 1 kilogram loopt Reynolds op tot boven de 500000. Dit rechtvaardigt de veronderstelling dat de weerstandscoëfficiënt voor de Glanerbrug ongeveer 0.20 is (gladde bol).
Kiezen we als 'gulden middenweg' voor de weerstandscoëfficiënt een waarde van 0.43 dan komen de resultaten van het model redelijk met de literatuur [2] overeen.

Foutenmarge

Elk model is slechts een afspiegeling van de werkelijkheid. Het hangt van een groot aantal faktoren af in hoeverre een model de werkelijkheid korrekt weergeeft. Daarom is een bespreking van de foutenbronnen en de grootte en invloed daarvan op het model en dus op de uiteindelijke uitkomsten onontbeerlijk. We geven hier een overzicht van alle foutenbronnen die een rol spelen.

1. Hoogte waarop de vrije val geacht wordt te beginnen. Dit punt is slechts zeer globaal bekend. We dienen rekening te houden met een fout die wel 5 kilometer kan bedragen.
2. Snelheid en richting op het 'startpunt'. Over deze gegevens is mogelijk nog minder te zeggen dan over de starthoogte. Het zal duidelijk zijn dat het lichtgevend traject niet plotseling overgaat in het donkere deel van het traject.
3. Beginmassa. Ook al een behoorlijk grote onbekende. Zodra de verdamping/verbranding aan het einde van het lichtgevende traject stopt mogen we aannemen dat de beginmassa vastligt. We gaan er daarbij wel vanuit dat na dit moment geen fragmentaties meer optreden met alle bijkomende effecten van dien. We nemen dus aan dat de beginmassa gelijk is aan de eindmassa (voor het donkere deel).
4. Weerstandscoëfficiënt C_w. We hebben gepoogd aannemelijk te maken dat de weerstandscoëfficiënt vermoedelijk rond de 0.43 ligt, maar we dienen er rekening mee te houden dat de werkelijke waarde ligt tussen 0.20 en 0.62.
5. Windsnelheid en richting op grotere hoogte. Deze gegevens zijn veruit het nauwkeurigst bekend daar ze met professionele instrumenten bepaald zijn (weerballon, radar).

Voor de diverse gemeten parameters gelden de volgende onnauwkeurigheden:
Hoogte : ± 5 (km)
Luchtdruk : ± 0.5 (hPa)
Windrichting : ± 5 (grd)
Windsnelheid : ± 0.5 (m/s)

Discussie en conclusies.

Uit de foutenbespreking is wel duidelijk naar voren gekomen met welke onzekerheden we te maken hebben. Indien we de beschikking zouden hebben over een multimultane opname van de Glanerbrug dan zouden een aantal van de bovenbeschreven problemen een stuk minder zijn. Vooral eindhoogte en beginmassa zijn dan veel nauwkeuriger bekend. In het geval van de Glanerbrug meteoriet zal het model zijn waarde vooral kunnen bewijzen om inzicht te geven in de verplaatsing van de meteoriet door luchtstromingen in de atmosfeer. Ook in de verplaatsing moeten we rekening houden met een onnauwkeurigheid van mogelijk wel enkele honderden meters. Maar we kunnen toch wel met enige zekerheid stellen dat de verplaatsing gelegen is binnen 500 en 1000 meter. Voor een overzicht verwijzen we nogmaals naar tabel 3.
In principe is het zo mogelijk om, terugrekenend, het beginpunt van het donkere gedeelte van het traject te bepalen. Een vergelijking met het professionele Dark Flight model van Dr. Z. Ceplecha zou een goede test zijn naar de overall werking van het hier besproken model. Laten we desondanks hopen dat het model zijn nut nog eens ergens zal weten te bewijzen.
Van het hier besproken model is een PC/MS-DOS programma ontwikkeld dat verkrijgbaar is bij de schrijver van dit artikel. •

Referenties

[1] Jenniskens, P.: *De val van de 'Glanerbrug', Persbericht Sterrewacht Leiden, Leiden, mei 1990.*

[2] McCrosky, R.E.; Ceplecha, Z.: *in : Peter Milmann , Meteorite Research, Reidel Publishing Comp. (1969), 600*

[3] Smith, J.M.M; Stammers, E. : *Fysische Transportverschijnselen I, DUM, Delft 1973.*

[4] Rietema, K.: *Fysische transport en overdrachtsverschijnselen, Prisma-Technica, Utrecht, 1976.*

[5] Bird, R.B; Stewart, W.E; Lightfoot, E.N.: *Transport Phenomena, Wiley International, New York, 1960.*

[6] Borghouts, A.N.: *Warmteleer en Kinetische Gastheorie, DUM, Delft 1973.*

[7] Hellings, P.: *Astrofysica voor Calculators, VSW Urania & VVS, Hove & Brussel 1981.*

[8] Kuiper, J.: *Radiant* **12** *(1990), 76*